Ferienaufgaben für die Sommerferien – Jahrgangsstufe 9

mit Lösungen

Aufgaben zur Wiederholung und Auffrischung von Grundkenntnissen

1. Reelle Zahlen

1)

Erkläre, worin sich die irrationalen Zahlen von den rationalen Zahlen unterscheiden.

2)

Konstruiere näherungsweise eine Strecke der Länge $\sqrt{40}$.

3)

Radiziere teilweise, aber soweit, wie möglich. (unter der Wurzel sollen nur noch Ausdrücke stehen, die man nicht weiter vereinfachen kann !)

$\sqrt{50}$ = ... $\sqrt{80}$ = ...

$\sqrt{147}$ = ... $\sqrt{252}$ = ...

$\sqrt{208}$ = ... $\sqrt{432}$ = ...

$\sqrt{27x^5y^6}$ = ...

$\sqrt{128a^4b^5c^{13}}$ = ...

4)

Vereinfache die folgenden Ausdrücke soweit wie möglich.

$\sqrt{75} \cdot \sqrt{24}$ = ...

$\sqrt{2016} : \sqrt{7}$ = ...

$\sqrt{18} + 3\sqrt{8}$ = ...

$\sqrt{45} - \sqrt{245}$ = ...

5)

Vereinfache soweit wie möglich.(Im Nenner sollen keine irrationalen Zahlen mehr stehen.)

$\frac{30}{\sqrt{5}}$ = ... $\frac{60}{\sqrt{24}}$ = ...,.

$\frac{28}{\sqrt{44}}$ = ...

Lösungen

1)

rationale Zahlen sind entweder endlich oder unendlich, dann aber periodisch...
irrationale Zahlen stehen für unendliche und nicht periodische Dezimalbrüche

2)

Rechtecksdiagonale bei 5 cm x 4 cm
oder Hypotenuse im rechtwinkl. Dreieck

3)

$5\sqrt{2}$; $4\sqrt{5}$; $7\sqrt{3}$; $6\sqrt{7}$; $4\sqrt{13}$; $12\sqrt{3}$

$3x^2y^3\sqrt{3xy}$; $8a^2b^2c^6\sqrt{2bc}$

4)

$\sqrt{1800} = 30\sqrt{2}$

$\sqrt{288} = 12\sqrt{2}$

$9\sqrt{2}$; $-4\sqrt{5}$

5)

$6\sqrt{5}$; $5\sqrt{6}$; $\frac{14\sqrt{11}}{11}$

2. *Quadratische Funktionen und Gleichungen*

1 Skizziere die Graphen zu den folgenden Funktionen mithilfe einer Wertetabelle in das untere Koordinatensystem.

a) $f(x) = 0{,}75x^2$

x							
f(x)							

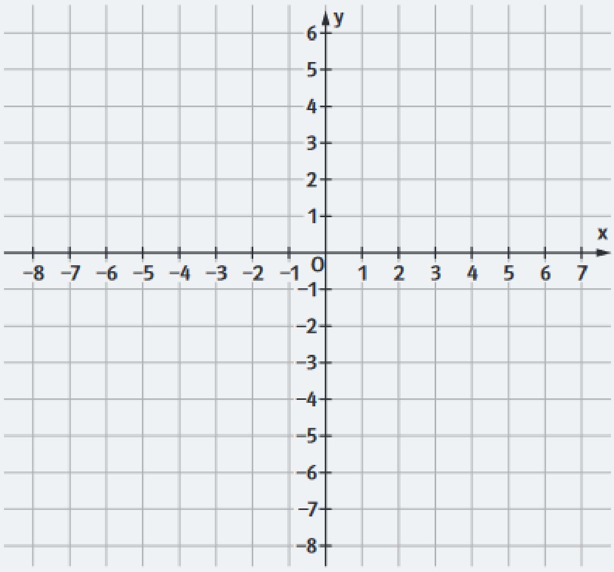
b) $f(x) = -3x^2 - 9x - 3$

x							
f(x)							

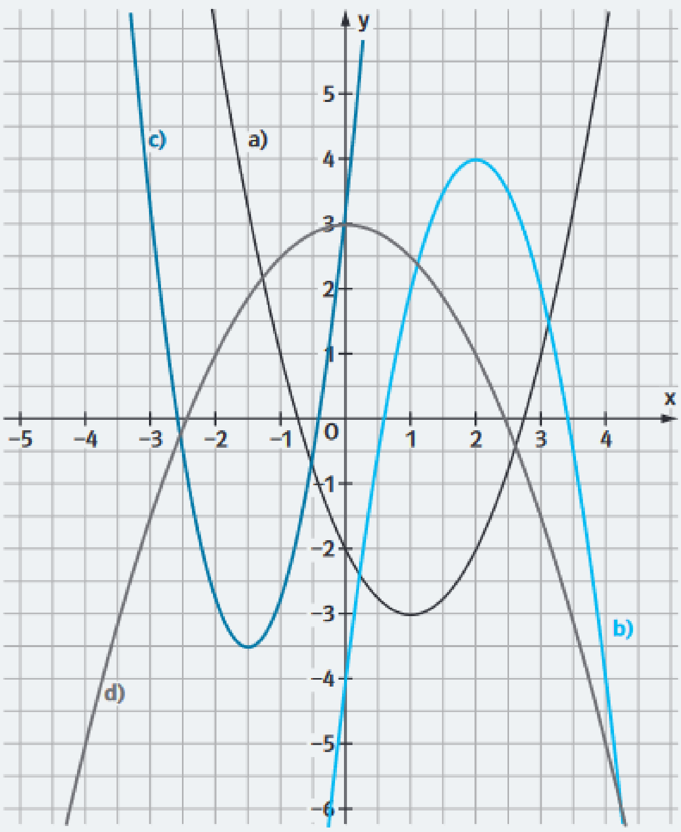
2 Skizziere die Graphen der folgenden quadratischen Funktionen ohne Wertetabelle.

a) $f(x) = (x-3)^2 - 1$ b) $f(x) = -(x+2)^2 + 4$

c) $f(x) = 0{,}5(x-1)^2 - 2{,}5$ d) $f(x) = -2(x-1)^2 + 2{,}5$



3 Bestimme die Funktionsgleichungen in Scheitelpunktform zu den folgenden Graphen.



a) f(x) = ______________________________

b) f(x) = ______________________________

c) f(x) = ______________________________

d) f(x) = ______________________________

4 Bestimme die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion f, deren Graph einen Scheitelpunkt S(1|2) besitzt und durch A(3|0) geht.

f(x) = ______________________________

5 Bestimme die Funktionsgleichung der Funktion f.

a) Der Graph von f verläuft durch die Punkte A(0|3), B(−1|6) und C(2|3).

f(x) = ______________________________

b) Der Graph von f verläuft durch die Punkte A(6|3), B(0|−9) und C(1|3).

f(x) = ______________________________

6 Vereinfache die Terme mithilfe der binomischen Formeln und dem Ausmultiplizieren von Summen.

a) $(a + 9)^2 =$ ______________________

b) $-(7 - 5b)^2 + 2b =$ ______________________

c) $(6 + 5a)(6 - 5a) =$ ______________________

d) $(1{,}5 + 3z)(-2z - 8) =$ ______________________

7 Führe die Funktionsgleichung in die Normalform über.

a) $f(x) = (x - 3)^2 + 6 =$ ______________________

b) $f(x) = -2(x + 5)^2 - 7 =$ ______________________

8 Überführe in die Scheitelpunktform.

a) $f(x) = x^2 + 6x - 3 =$ ______________________

b) $f(x) = -3x^2 + 6x + 7 =$ ______________________

c) $f(x) = 4x + 0{,}4x^2 - 8 =$ ______________________

9 Gib die Lösung bzw. die Lösungen der quadratischen Gleichung an.

a) $x^2 - 49 = 0$

$x_1 =$ ______________; $x_2 =$ ______________

b) $-91 + 4x^2 = -3x^2$

$x_1 =$ ______________; $x_2 =$ ______________

c) $6x^2 - 72x = 0$

$x_1 =$ ______________; $x_2 =$ ______________

d) $28x^2 - 4x = 6(5x^2 + 2x)$

$x_1 =$ ______________; $x_2 =$ ______________

Lösungen

1 Graphen mithilfe einer Wertetabelle skizzieren

Zunächst müssen für x sinnvolle Werte in f(x) eingesetzt werden, sodass der Scheitelpunkt der Parabel beim Zeichnen zu sehen ist.
Die Funktion in Aufgabenteil a) hat ihren Scheitelpunkt offensichtlich in (0|0), weshalb Werte um x = 0 sinnvoll sind (vgl. Wertetabelle). Wenn man Werte rechts von x = 0 in f(x) einsetzt, kann man aufgrund der Symmetrie einer Parabel auf die entsprechenden Werte links von x = 0 schließen, ohne zu rechnen.
Um herauszufinden, welche Werte in Aufgabenteil b) sinnvoll sind, setzt man zunächst einen beliebigen x-Wert in f(x) ein, z. B. x = 0.
f(0) = −3, also ist (0|−3) ein Punkt des Graphen von f, der ins Koordinatensystem eingetragen werden kann. Jetzt wird ein x-Wert rechts oder links von x = 0 in f(x) eingesetzt, z. B. x = 1:
f(1) = −15. Da y = −15 nicht mehr im vorgegebenen Koordinatensystem zu sehen ist, ist dieser Punkt (1|−15) nicht sehr sinnvoll.

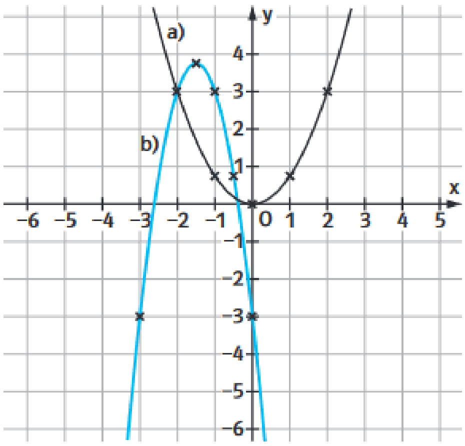
a) $f(x) = 0{,}75x^2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	6,75	3	0,75	0	0,75	3	6,75

b) $f(x) = -3x^2 - 9x - 3$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	−3	3	3,75	3	0,75	−3	−15

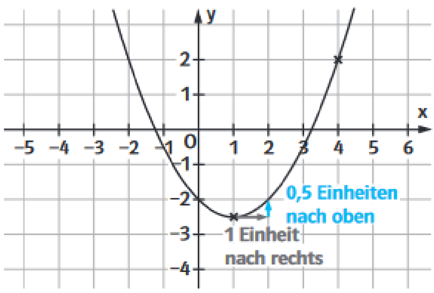
Graphen der Funktionen aus a) und b):



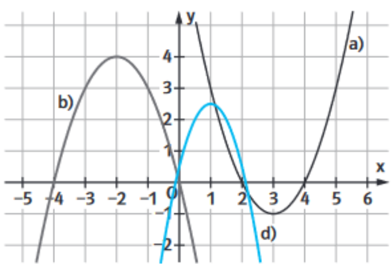
Man setzt also z. B. x = −1 ein und erhält: f(−1) = 3. Da auch f(−2) = 3 und jede Parabel symmetrisch ist, kann man folgern, dass der Scheitelpunkt der Funktion genau zwischen x = −1 und x = −2 liegt, also bei x = −1,5.
f(−1,5) = 3,75, also ist S(−1,5|3,75) der Scheitelpunkt von f.

2 Graphen skizzieren ohne Wertetabelle

Im Folgenden wird das Vorgehen exemplarisch an Aufgabenteil c) erläutert.
Der Funktionsgleichung
$f(x) = 0{,}5(x-1)^2 - 2{,}5$ in Scheitelpunktform kann man die Koordinaten des Scheitelpunkts S(1|−2,5) direkt entnehmen und ins Koordinatensystem einzeichnen (rechts).
Da der Streckfaktor (a = 0,5) vor der Klammer positiv ist, ist die Parabel nach oben geöffnet.
Um die Parabel zu skizzieren, kann man vom Scheitelpunkt aus eine Einheit nach rechts und 0,5 Einheiten nach oben gehen.



Damit die Skizze des Funktionsgraphen etwas genauer ist, kann ein weiterer beliebiger Punkt P(4|2) durch Einsetzen in f(x) bestimmt und anschließend ins Koordinatensystem eingetragen werden.



3 Funktionsgleichungen zu Graphen bestimmen

Im Folgenden wird das Vorgehen exemplarisch an Aufgabenteil c) erläutert.
Zunächst liest man die Koordinaten des Scheitelpunkts $S(-1{,}5\,|\,-3{,}5)$ im Koordinatensystem ab und setzt sie in die allgemeine Scheitelpunktform
$f(x) = a(x - d)^2 + e$ für d bzw. e ein:
$f(x) = a(x - (-1{,}5))^2 - 3{,}5 = a(x + 1{,}5)^2 - 3{,}5$.

Nun muss der Faktor a bestimmt werden.
Diesen kann man entweder direkt aus dem Koordinatensystem ablesen oder mithilfe eines beliebigen Punktes P der Parabel durch Einsetzen der Koordinaten für x und y berechnen.
Zum Ablesen des Streckfaktors a geht man vom Scheitelpunkt $S(-1{,}5\,|\,-3{,}5)$ aus eine Einheit nach rechts und anschließend nach oben, bis man wieder auf den Graphen trifft. Die Einheiten, die man nach oben geht, entsprechen dem Streckfaktor a. Der Streckfaktor a ist also 3, da man vom Scheitelpunkt S aus eine Einheit nach rechts und drei Einheiten nach oben geht, um wieder auf die Parabel zu treffen.
Die Funktionsgleichung lautet also $f(x) = 3(x + 1{,}5)^2 - 3{,}5$.

Auf den Streckfaktor $a = 3$ kommt man ebenfalls rechnerisch, wenn man z. B. den Punkt $P(-2{,}5\,|\,-0{,}5)$ in f(x) einsetzt und anschließend die Gleichung nach a auflöst:

$$-0{,}5 = a(-2{,}5 + 1{,}5)^2 - 3{,}5$$
$$-0{,}5 = a \cdot 1 - 3{,}5 \qquad | + 3{,}5$$
$$3 = a$$

Die Funktionsgleichungen zu den Aufgabenteilen a), b) und c) erhält man entsprechend:
a) $f(x) = (x - 1)^2 - 3$ b) $f(x) = -2(x - 2)^2 + 4$ c) $f(x) = -0{,}5x^2 + 3$

4 Funktionsgleichung in SP-Form bestimmen

Gegeben sind ein Punkt und der Scheitelpunkt der Parabel. Als allgemeiner Ansatz wird also die Scheitelpunktform gewählt.
Allgemeiner Ansatz: $f(x) = a(x - d)^2 + e$
$S(1\,|\,2)$ in f(x) einsetzen: $f(x) = a(x - 1)^2 + 2$
Um den Streckfaktor a zu bestimmen, wird der Punkt $A(3\,|\,0)$ in die Gleichung eingesetzt:

$$0 = a(3 - 1)^2 + 2 \qquad | \text{ Vereinfachen}$$
$$0 = a \cdot 2^2 + 2 \qquad | \text{ Vereinfachen}$$
$$0 = 4a + 2 \qquad | - 2$$
$$-2 = 4a \qquad | : 4$$
$$a = -\tfrac{1}{2}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion f ist also $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$.

5 Funktionsgleichung in Normalform bestimmen

a) Aus den Koordinaten von $A(0|3)$ kann man den y-Achsenabschnitt $c = 3$ entnehmen. Durch Einsetzen von A und C lässt sich die Normalform bestimmen.

Allgemeiner Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$

y-Achsenabschnitt $c = 3$ einsetzen: $f(x) = ax^2 + bx + 3$

$B(-1\|6)$ einsetzen:	$6 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 3$		| vereinfachen
	$6 = a - b + 3$		| $-3+b$
	$a = 3 + b$	(I)	
$C(2\|3)$ einsetzen:	$3 = a \cdot (2)^2 + b \cdot (2) + 3$		| vereinfachen
	$3 = 4a + 2b \cdot + 3$		| -3
	$0 = 4a + 2b$	(II)	

Nach obigen Umformungen bietet sich das **Einsetzungsverfahren** an, $a = 3 + b$ wird in Gleichung II eingesetzt:

$$0 = 4 \cdot (3 + b) + 2b = 12 + 4b + 2b = 12 + 6b \quad | -12$$
$$-12 = 6b \quad | :6$$
$$b = -2$$

Es wird $b = -2$ in Gleichung I eingesetzt, um a zu erhalten: $a = 3 + (-2) = 1$.

a und b werden in die allgemeine Gleichung eingesetzt:

Die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion f ist also $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

b) Aus den Koordinaten von $B(0|-9)$ kann man den y-Achsenabschnitt $c = -9$ entnehmen. Durch Einsetzen von A und C lässt sich die Normalform bestimmen.

Allgemeiner Ansatz: $f(x) = ax^2 + bx + c$

y-Achsenabschnitt ist $c = -9$ einsetzen: $f(x) = ax^2 + bx - 9$

$A(6\|3)$ einsetzen:	$3 = a \cdot (6)^2 + b \cdot (6) - 9$		| vereinfachen
	$3 = 36a + 6b - 9$		| $+9$
	$12 = 36a + 6b$		| $:(-6)$
	$-2 = -6a - b$	(I)	
$C(1\|3)$ einsetzen:	$3 = a \cdot (1)^2 + b \cdot (1) - 9$		| vereinfachen
	$3 = a + b - 9$		| $+9$
	$12 = a + b$	(II)	

Nach obigen Umformungen bietet sich das **Additionsverfahren** an, Gleichung I und Gleichung II werden addiert:

I + II: $10 = -5a$, also $a = -2$

Jetzt wird $a = -2$ in Gleichung II. eingesetzt, um b zu erhalten:

$12 = -2 + b$, also $b = 14$

a und b werden in die allgemeine Gleichung eingesetzt:

Die gesuchte Funktionsgleichung der Funktion f ist also $f(x) = -2x^2 + 14x - 9$.

6 Binomischen Formeln/Ausmultiplizieren von Summen

a) Anwenden der 1. binomischen Formel ergibt: $(a + 9)^2 = a^2 + 18a + 81$

b) Anwenden der 2. binomischen Formel ergibt:

$$-(7 - 5b)^2 + 2b = -(49 - 70b + 25b^2) + 2b \quad | \text{ Klammer auflösen}$$
$$= -49 + 70b - 25b^2 + 2b = -49 + 72b - 25b^2$$

c) Anwenden der 3. binomischen Formel ergibt: $(6 + 5a)(6 - 5a) = 36 - 25a^2$

d) Ausmultiplizieren der Summen ergibt:

$$(1{,}5 + 3z)(-2z - 8) = -3z - 12 - 6z^2 - 24z \quad | \text{ zusammenfassen}$$
$$= -6z^2 - 27z - 12$$

7 Funktionsgleichung in Normalform umformen

a) $f(x) = (x-3)^2 + 6 \quad | \text{ 2. BF}$
$= x^2 - 6x + 9 + 6$
$= x^2 - 6x + 15$

b) $f(x) = -2(x+5)^2 - 7 \quad | \text{ 1. BF}$
$= -2(x^2 + 10x + 25) - 7$
$= -2x^2 - 20x - 50 - 7$
$= -2x^2 - 20x - 57$

8 Funktionsgleichungen von Normalform in Scheitelpunktform

a) $f(x) = x^2 + 6x - 3$
$= x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 - 3$
$= (x+3)^2 - 3^2 - 3$
$= (x+3)^2 - 12$

b) $f(x) = -3x^2 + 6x + 7$
$= -3(x^2 - 2x) + 7$
$= -3(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) + 7$
$= -3((x-1)^2 - 1) + 7$
$= -3(x-1)^2 + 3 + 7$
$= -3(x-1)^2 + 10$

c) $f(x) = 4x + 0{,}4x^2 - 8$ | Faktor „0,4“ vor x^2 ausklammern
$= 0{,}4(x^2 + 10x) - 8$ | mit $\left(\frac{10}{2}\right)^2$ quadratisch ergänzen
$= 0{,}4(x^2 + 10x + 5^2 - 5^2) - 8$ | 1. BF anwenden
$= 0{,}4((x+5)^2 - 25) - 8$ | äußere Klammer auflösen
$= 0{,}4(x+5)^2 - 10 - 8$
$= 0{,}4(x+5)^2 - 18$

9 Lösen einfacher quadratischer Gleichungen

a) $x^2 - 49 = 0 \quad | +49$
$x^2 = 49 \quad |$ Wurzelziehen
$x_1 = 7;\ x_2 = -7$

b) $-91 + 4x^2 = -3x2 \quad | -4x^2$
$-91 = -7x^2 \quad | :(-7)$
$13 = x^2 \quad |$ Wurzelziehen
$x_1 = \sqrt{13};\ x_2 = -\sqrt{13}$

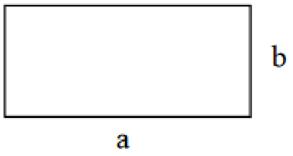
c) $6x^2 - 72x = 0 \quad |$ Ausklammern
$x(6x - 72) = 0$
$x_1 = 0$ oder $6x - 72 = 0 \quad | +72$
$6x = 72 \quad | :6$
$x_2 = 12$

d) $28x^2 - 4x = 6(5x^2 + 2x) \quad |$ Umformung
$28x^2 - 4x = 30x^2 + 12x \quad | -28x^2 + 4x$
$0 = 2x^2 + 16x \quad |$ Ausklammern
$0 = 2x(x+8)$
$x_1 = 0$ oder $x + 8 = 0 \quad | -8$
$x_2 = -8$

3. *Quadratische Funktionen in Anwendungen*

1)

Ein Rechteck hat den Umfang $u = 40\text{cm}$. Bestimme die Seitenlängen a und b des Rechtecks so, dass der Flächeninhalt maximal wird.

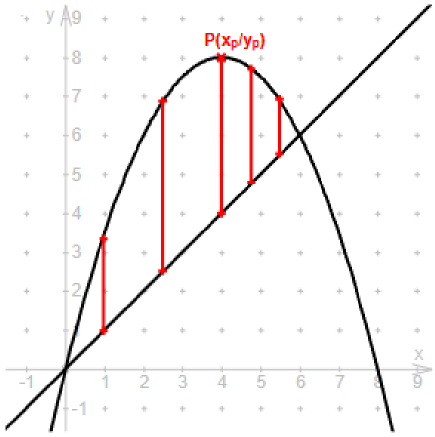


2)

Das Bild zeigt eine Gerade g und eine Parabel p.

a) Bestimme von Gerade und Parabel jeweils die Funktionsgleichung.
Berechne dann die Schnittpunkte der beiden Graphen.

b) Gib die Koordinaten eines Punktes P auf der Parabel nur in Abhängigkeit von x_p an.
Zeichnet man für $0 < x_p < 6$ von P eine senkrechte Strecke zur Geraden (siehe Bild), so sind diese Strecken unterschiedlich lang.
Bestimme unter diesen Strecken die längste!



3) Bestimme die Gleichung der quadratischen Funktion, deren Graph durch drei Punkte A, B und C verläuft.

A(-2|-1); B(-1|0); C(-4|3)

Lösungen

1)

$F = a \cdot b = a(20cm - a)$ hat den größten Wert für $a = b = 10cm$.
Der maximale Flächeninhalt beträgt also $100cm^2$.

2)

a) $f(x) = -0{,}5x(x-8) = -0{,}5x^2 + 4x$

$g(x) = x$

Schnittpunkte $f(x) = g(x) \Leftrightarrow -0{,}5x^2 + 4x = x \Leftrightarrow x(6-x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0\,;\, x_2 = 6$

b) $P(x_P / 4x_P - 0{,}5x_P{}^2)$

Streckenlänge $d = d(x_P) = f(x_P) - g(x_P) = 3x_P - 0{,}5x_P{}^2 = 0{,}5x_P(6 - x_P)$

Diese Streckenlänge d ist für $x_P = 3$ maximal.

Also $d_{max} = d(3) = 3 \cdot 3 - 0{,}5 \cdot 3^2 = 4{,}5$.

3)

Mit A(-2|-1), B(-1|0) und C(-4|3) ergibt durch Einsetzen in $y = ax^2 + bx + c$ sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrlll} & -1 = & a(-2)^2 & +b(-2) & +c \\ \wedge & 0 = & a(-1)^2 & +b(-1) & +c \\ \wedge & 3 = & a(-4)^2 & +b(-4) & +c \end{array}$$

$$\begin{array}{lrllll} & -1 = & 4a & -2b & +c & |\cdot(-1) \\ \wedge & 0 = & a & -b & +c & \\ \wedge & 3 = & 16a & -4b & +c & \end{array}$$

Ziel: Gleichung I und II addieren, um c zu eliminieren

$$\begin{array}{lrllll} & 1 = & -4a & +2b & -c & |+ \\ \wedge & 0 = & a & -b & +c & |+ \\ \wedge & 3 = & 16a & -4b & +c & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrllll} & 1 = & -3a & +b & & \\ \wedge & 0 = & a & -b & +c & |\cdot(-1) \\ \wedge & 3 = & 16a & -4b & +c & \end{array}$$

Ziel: Gleichung II und III addieren, um c zu eliminieren

$$\begin{array}{lrllll} & 1 = & -3a & +b & & \\ \wedge & 0 = & -a & +b & -c & |+ \\ \wedge & 3 = & 16a & -4b & +c & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrlllll} & 1 & =-3a & +b & & |\cdot 5 & \\ \wedge & 3 & =15a & -3b & & & \\ \wedge & 3 & =16a & -4b & +c & & \end{array}$$

Ziel : Gleichung I und II addieren, um b zu eliminieren

$$\begin{array}{lrllll} & 5 & =-15a & +5b & & |+ \\ \wedge & 3 & =15a & -3b & & |+ \\ \wedge & 3 & =16a & -4b & +c & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrllll} & 8 & = & 2b & & |:2 \\ \wedge & 3 & =15a & -3b & & \\ \wedge & 3 & =16a & -4b & +c & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrlll} & b & =4 & & \\ \wedge & 3 & =15a & -3\cdot 4 & \\ \wedge & 3 & =16a & -4\cdot 4 & +c \end{array}$$

$$\begin{array}{lrlll} & b & =4 & & \\ \wedge & 3 & =15a & -12 & \\ \wedge & 3 & =16a & -16 & +c \end{array}$$

$$\begin{array}{lrlll} & b & =4 & & \\ \wedge & 15a & =15 & & \\ \wedge & 3 & =16a & -16 & +c \end{array}$$

$$\begin{array}{lrl} \wedge & b & =4 \\ \wedge & a & =1 \\ \wedge & c & =16\cdot 1+19=3 \end{array}$$

Die Funktionsgleichung lautet demnach:

$y=x^2+4x+3$

4. ***Wahrscheinlichkeit verknüpfter Ereignisse***

1)

Ein Konditormeister hat 200 Pralinen hergestellt. 80% von ihnen sind aus dunkler Schokolade, der Rest aus weißer Schokolade. 30% der 200 Pralinen enthalten Nüsse; unter den Pralinen aus weißer Schokolade haben jedoch nur 12,5% einen Nussanteil.
Stelle die beschriebene Situation dar, und zwar

1. mit einer Vierfeldertafel für die absoluten Häufigkeiten
2. mit einer Vierfeldertafel für die relativen Häufigkeiten.

2) Fülle mit den folgenden Informationen eine Vierfeldertafel mit absoluten Häufigkeiten aus.

In einer Firma arbeiten 45 Männer und 50 Frauen. 30 weibliche Mitarbeitende der Firma sind jünger als 50 Jahre und 27 Männer sind älter als 50 Jahre.

Lösungen

1)

Festlegen von geeigneten Abkürzungen

Als Erstes legst du die betrachteten Ereignisse bzw. geeignete Abkürzungen dafür fest, zum Beispiel:

- D : "Die Praline ist aus dunkler Schokolade."
- N : "Die Praline hat einen Nussanteil."

Teilaufgabe 1: Vierfeldertafel für die absoluten Häufigkeiten

Gesucht: Vierfeldertafel für absolute Häufigkeiten

Zunächst legst du das Grundgerüst für die Vierfeldertafel an:

- Betrachte **die beiden Ereignisse, um die es geht**.
- Das eine davon kommt in die Spalten, das andere in die Zeilen.

Grundgerüst anlegen

	D	$\overline{D}$	
N			
$\overline{N}$			

Hier steht jetzt D in den Spalten und N in den Zeilen - das kannst du natürlich auch andersherum machen.

Da eine Vierfeldertafel für die absoluten Häufigkeiten gesucht ist, trägst du in das äußerste Feld rechts unten die Gesamtzahl "200" ein.

	D	$\overline{D}$	
N			
$\overline{N}$			
			200

Die übrigen Zahlen musst du noch aus dem Text herausfinden bzw. später ausrechnen.
In der Aufgabe ist angegeben, dass

- 80% der 200 Pralinen aus dunkler Schokolade sind, und
- 30% der 200 Pralinen einen Nussanteil haben.

Berechne daraus (z.B. mit der entsprechenden Formel zur Prozentrechnung), *wie viele* Pralinen zu D und *wie viele* zu N gehören.

$$|D| = 0{,}80 \cdot 200 = 160$$
$$|N| = 0{,}30 \cdot 200 = 60$$

Diese Werte trägst du in der Vierfeldertafel **in den Rändern** an den jeweiligen Stellen ein(, denn betrachtet werden hier D bzw. N **alleine** und nicht irgendwelche Schnittmengen).

	D	$\overline{D}$	
N			60
$\overline{N}$			
	160		200

So, damit könntest du die Werte auf den Rändern jetzt schon vollständig ausrechnen.
Um die Vierfeldertafel ganz vervollständigen zu können, brauchst du aber noch irgendeinen Wert in einem der vier inneren Felder.

	D	$\overline{D}$	
N		???	60
$\overline{N}$			
	160		200

Du hast noch die Angabe, dass 12,5% der Pralinen mit weißer Schokolade einen Nussanteil haben.
Das kannst du aber nur auswerten, wenn du weißt, wie viele Pralinen mit weißer Schokolade es insgesamt sind, "Weiße Schokolade" bedeutet "Nicht dunkle Schokolade" - das heißt, du brauchst die Anzahl von $\overline{D}$.

	D	$\overline{D}$	
N			60
$\overline{N}$			
	160	$\lvert\overline{D}\rvert = ?$	200

$\lvert\overline{D}\rvert = 200 - 160 = 40$

$\lvert\overline{D}\rvert$ findest du leicht mit Hilfe der bisherigen Einträge in die Vierfeldertafel heraus:
Die Zahlen, die auf den Rändern noch fehlen, erhältst du nämlich ganz einfach, indem du jeweils zur 200 ergänzt.
(Den Wert $\lvert\overline{D}\rvert = 40$ trägst du natürlich gleich in das entsprechende Feld auf dem Rand der Vierfeldertafel ein.)

	D	$\overline{D}$	
N		???	60
$\overline{N}$			
	160	40	200

Es sind also 40 Pralinen mit weißer Schokolade, und von diesen haben 12,5% einen Nussanteil.
Berechne 12,5% von 40.

12,5% von 40 (Pralinen):
$$\frac{12{,}5}{100} \cdot 40 = \frac{12{,}5 \cdot 40}{100} = 5$$

5 der Pralinen sind somit weiß *und* haben einen Nussanteil.
Trage die Zahl "5" in das Feld für $\lvert\overline{D} \cap N\rvert$ ein.

	D	$\overline{D}$	
N		5	60
$\overline{N}$			
	160	40	200

Fehlende Werte in der Vierfeldertafel ausrechnen

	D	$\overline{D}$	
N		5	60
$\overline{N}$			???
	160	40	200

Berechne nun die noch fehlenden Werte,
Zum Beispiel als erstes die Zahl für $\lvert\overline{N}\rvert$, die auf dem Rand noch fehlt. Sie erhältst du, indem du wieder zur 200 ergänzt:
$\lvert\overline{N}\rvert = 200 - 60 = 140$

	D	$\overline{D}$	
N	???	5	60
$\overline{N}$			140
	160	40	200

Danach kannst du zum Beispiel $|N \cap D|$ errechnen:
$|N \cap D| = 60 - 5 = 55$

	D	$\overline{D}$	
N	55	5	60
$\overline{N}$	???		140
	160	40	200

... und danach zum Beispiel $|\overline{N} \cap D|$:
$|\overline{N} \cap D| = 160 - 55 = 105$

	D	$\overline{D}$	
N	55	5	60
$\overline{N}$	105		140
	160	40	200

... und zuletzt $|\overline{N} \cap \overline{D}|$:
Entweder du rechnest

- $|\overline{N} \cap \overline{D}| = 140 - 105 = 35$

oder du rechnest

- $|\overline{N} \cap \overline{D}| = 40 - 5 = 35$

(bzw. du rechnest am besten beides und überprüftst das eine mit dem anderen.)
Das trägst du ein, und dann ist die Vierfeldertafel fertig.

Fertige Vierfeldertafel für die absoluten Häufigkeiten:

	D	$\overline{D}$	
N	55	5	60
$\overline{N}$	105	35	140
	160	40	200

2)

Schreibe die gegebenen Informationen in die entsprechenden Felder.

	W	$\overline{W}$	
<50	30		
$\overline{<50}$		27	
	50	45	95

Rechne: $|\overline{<50} \cap W| = |W| - |<50 \cap W| = 50 - 30 = 20$ $|\overline{<50}| = |\overline{<50} \cap W| + |\overline{<50} \cap \overline{W}| = 20 + 27 = 47$ $|<50| = 95 - |\overline{<50}| = 95 - 47 = 48$ $|<50 \cap \overline{W}| = |<50| - |<50 \cap W| = 48 - 30 = 18$

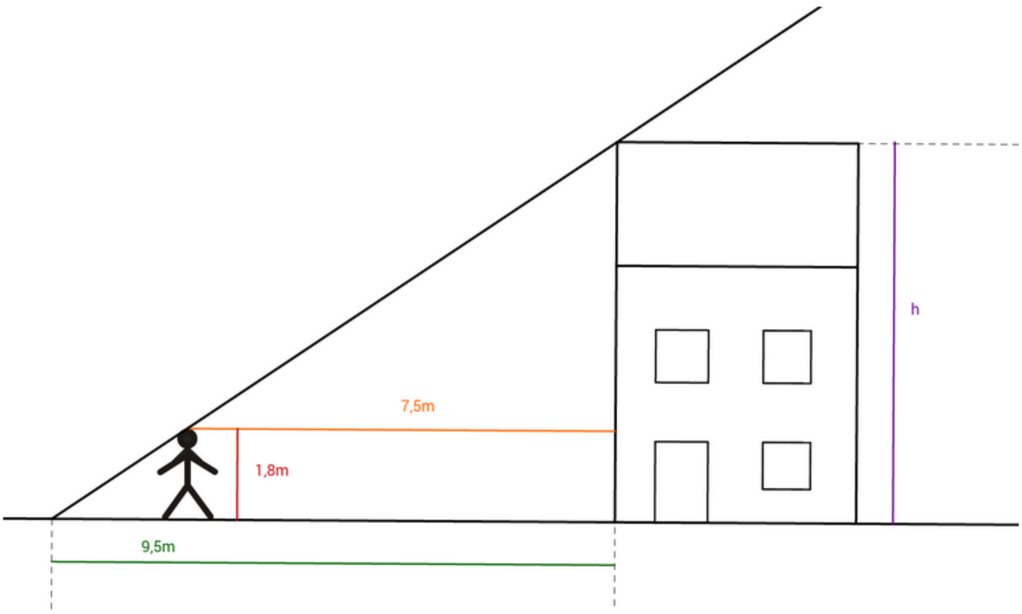
	W	$\overline{W}$	
<50	30	18	48
$\overline{<50}$	20	27	47
	50	45	95

So sieht die fertige Vierfeldertafel dann aus.

5. Ähnlichkeit und Strahlensatz

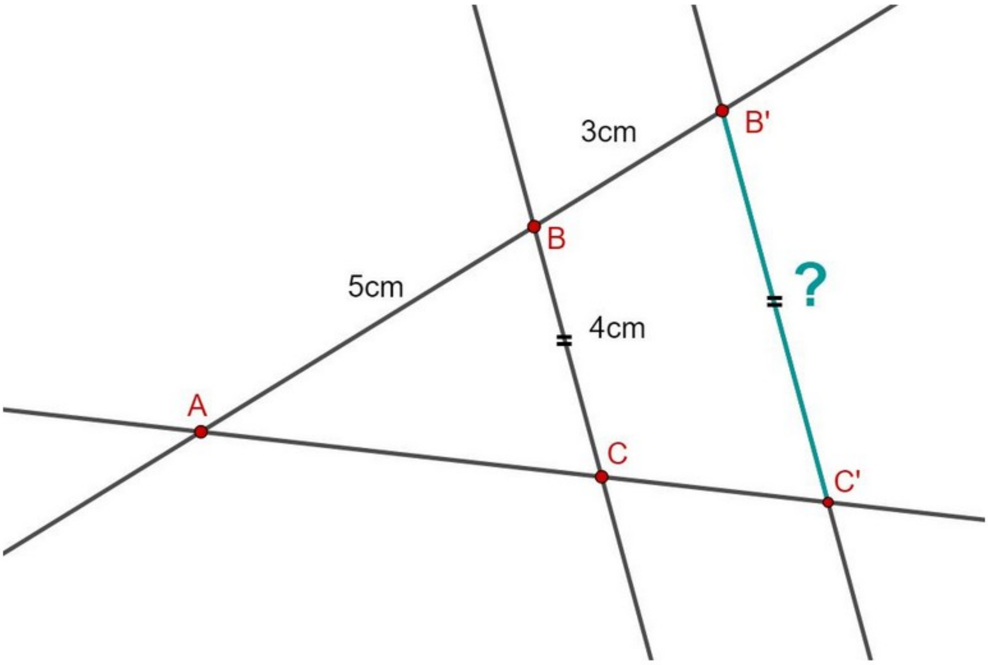
1)

Klaus will ein Haus mithilfe des Hausschattens ausmessen. Dazu misst Klaus zuerst den Abstand vom Haus bis zum Endpunkt des Schattens. Dieser Abstand beträgt genau **9,5*m***.
Anschließend stellt sich Klaus, der **1,80*m*** groß ist, genau an den Punkt, ab dem er im Schatten ist. Diesen Ort markiert er und misst wieder den Abstand von dieser Markierung zum Haus. Dieser beträgt **7,5*m***.
Benutze den Strahlensatz, um die Höhe des Hauses zu berechnen!



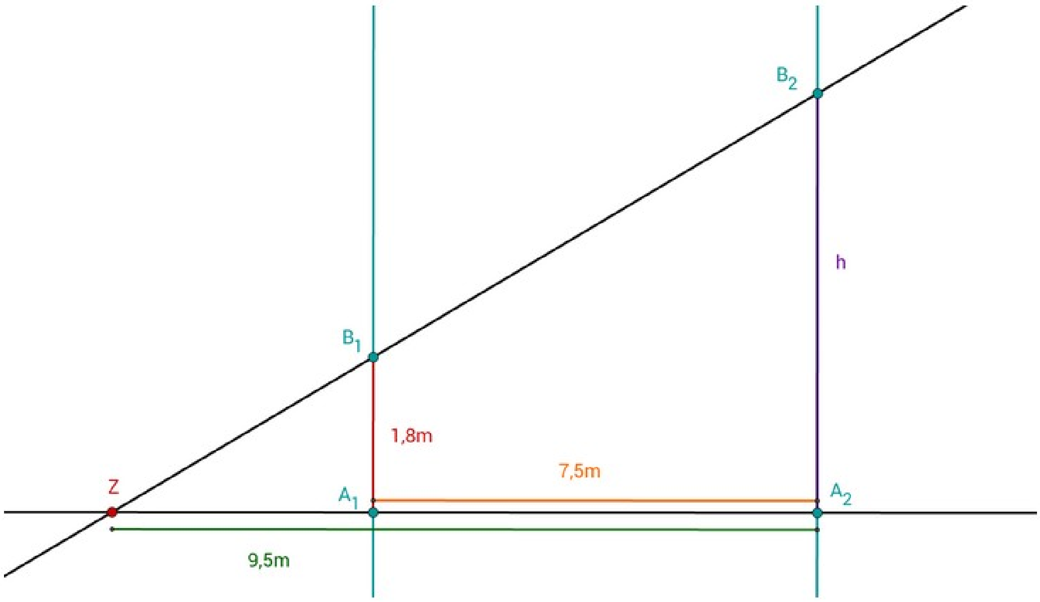
2)

Die Strecken $\overline{AB} = 5\,\text{cm}$, $\overline{BB'} = 3\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 4\,\text{cm}$ sind gegeben. Berechne die Länge der türkis markierten Strecke $\overline{B'C'}$!



Lösungen

1)



Um nun die fehlende Höhe ***h*** auszurechnen schreibst du dir am besten nochmal die gegebenen Werte auf. Dazu benutzt du die Zuordnung aus der Skizze oben.

$$\overline{A_1B_1} = 1{,}8m$$

$$\overline{A_2B_2} = h$$

$$\overline{ZA_1} = 9{,}5m - 7{,}5m = 2m$$

$$\overline{ZA_2} = 9{,}5m$$

Zweiter Strahlensatz: $\dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \dfrac{\overline{ZA_2}}{\overline{ZA_1}}$

Stelle den Strahlensatz nach der gesuchten Größe $h = \overline{A_2B_2}$ um.

$$\overline{A_2B_2} = \frac{\overline{ZA_2}}{\overline{ZA_1}} \cdot \overline{A_1B_1}$$

Setze die Werte ein und berechne die Höhe für das Haus!

$$h = \overline{A_2B_2} = \frac{9{,}5m}{2m} \cdot 1{,}8m = 8{,}55m$$

Das von Klaus gemessene Haus ist 8,55m hoch.

2)

Der Strahlensatz für diese V -Figur lautet:

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

Gesucht ist die Strecke $\overline{B'C'}$. Löse nun die Bruchgleichung des Strahlensatzes nach dieser Strecke auf!

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

Multipliziere dazu mit $\overline{BC}$.

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} \cdot \overline{BC} = \overline{B'C'}$$

Setze nun die Zahlen aus der Angabe ein und berechne $\overline{B'C'}$.

$$\overline{B'C'} = \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} \cdot \overline{BC}$$
$$\overline{B'C'} = \frac{8\,\text{cm}}{5\,\text{cm}} \cdot 4\,\text{cm} = 6{,}4\,\text{cm}$$

Die gesuchte Strecke $\overline{B'C'}$ hat eine Länge von **6,4 cm**.

6. Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten und n-te Wurzel

1)

Mache den Nenner rational und schreibe den Term als Wurzel.

a) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$ b) $6{,}75^{\frac{1}{3}}$ c) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}}$ d) $0{,}25^{\frac{3}{5}}$

2)

Bestimme die Lösungsmenge und gib die Lösung als möglichst weit vereinfachten Wurzelterm an.

a) $2 \cdot x^3 = 32$ b) $0{,}2 \cdot x^3 = -32$ c) $2 - 3x^4 = 5$

d) $2 \cdot x^3 - 4 = 5$ e) $0{,}25 \cdot x^6 + 4 = 4^{1{,}5}$ f) $0{,}5 \cdot (x-1)^3 - 4 = 12$

3)

Vereinfache den Term und stelle ihn in Potenz- und Wurzelschreibweise dar.

a) $\sqrt[4]{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a}}}$ b) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b} \cdot \sqrt[2]{\frac{a^3}{b}} \cdot \sqrt[4]{\frac{b^3}{a^5}}}$

Lösungen

1)

a) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{\frac{1\cdot 2}{2^3\cdot 2}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}$

b) $6,75^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{27}{4}} = \sqrt[3]{\frac{3^3\cdot 2}{2^2\cdot 2}} = \frac{3\cdot\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^2}\cdot\sqrt[3]{5}} = \frac{2\cdot\sqrt[3]{5}}{5}$

d) $0,25^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2^2}\right)^3} = \sqrt[5]{\frac{1\cdot 2^4}{2^6\cdot 2^4}} = \frac{\sqrt[5]{16}}{4}$

2)

a) $2\cdot x^3 = 32 \Leftrightarrow x^3 = 16 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2^4} = 2\cdot\sqrt[3]{2}$

b) $0,2\cdot x^3 = -32 \Leftrightarrow x^3 = -160 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{160} \Leftrightarrow x = -2\cdot\sqrt[3]{20}$

c) $2-3x^4 = 5 \Leftrightarrow 3x^4 = -3 \Leftrightarrow x^4 = -1$ keine Lösung!

d) $2\cdot x^3 - 4 = 5 \Leftrightarrow 2\cdot x^3 = 9 \Leftrightarrow x^3 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9\cdot 4}{2\cdot 4}} = \frac{\sqrt[3]{36}}{2}$

e) $0,25\cdot x^6 + 4 = 4^{1,5} \Leftrightarrow x^6 + 16 = 4\cdot 4^{1,5} \Leftrightarrow x^6 = 4\cdot 8 - 16 \Leftrightarrow x^6 = 16 \Leftrightarrow$

$x_{1/2} = \pm\left(2^4\right)^{\frac{1}{6}} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

f) $0,5\cdot(x-1)^3 - 4 = 12 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 16\cdot 2 \Leftrightarrow x-1 = \sqrt[3]{32} \Leftrightarrow x = 1+2\cdot\sqrt[3]{4}$

3)

a) $\sqrt[4]{a^2\cdot\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{a}}} = \left(a^2\cdot\left(a^{2+\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(a^2\cdot a^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{17}{6}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{17}{24}} = \sqrt[24]{a^{17}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}\cdot\sqrt[2]{\frac{a^3}{b}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b^3}{a^5}}} = \left(a^2\cdot b^{-1}\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{-\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{3}{4}}\cdot a^{-\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^{\frac{9}{4}}\cdot b^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{4}}\cdot b^{-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{b}} = \frac{\sqrt[4]{a^3b^3}}{b}$

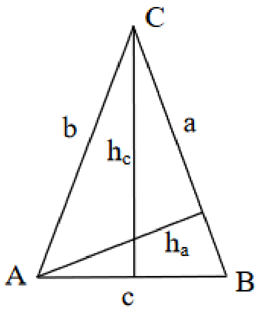
7. Satz des Pythagoras

1)

Das gleichschenklige Dreieck ABC hat die Seiten $a = b = 8$ und $c = 4$.

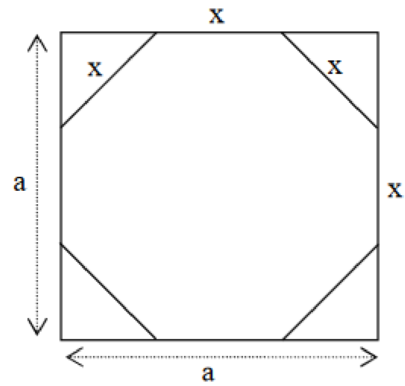
a) Berechne die Höhe h_c und den Flächeninhalt des Dreiecks.

b) Berechne die Höhen h_a und h_b.



2)

In einem Quadrat der Seitenlänge a sollen vier gleichschenklige Dreiecke so abgeschnitten werden, dass ein reguläres Achteck entsteht.
Berechne die Seitenlänge x des Achtecks als Bruchteil der Länge a.
Wie viel Prozent der Quadratfläche macht die Fläche des Achtecks aus?



Lösungen

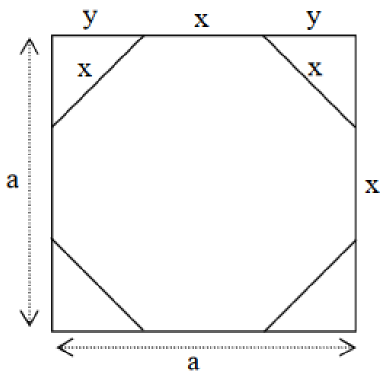
1)

a) $a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + h_c^2 \Leftrightarrow h_c^2 = 8^2 - 2^2 \Leftrightarrow h_c^2 = 60 \Leftrightarrow h_c = 2\cdot\sqrt{15}$

$A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{15} = 4\sqrt{15}$

b) $4\sqrt{15} = A_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a \Leftrightarrow h_a = \frac{2\cdot 4\sqrt{15}}{8} = \sqrt{15}$ und $h_b = h_a = \sqrt{15}$

2)



Es gilt $a = y + x + y$ und $x = y\cdot\sqrt{2}$

also $a = 2y + y\cdot\sqrt{2} = (2+\sqrt{2})\cdot y$ und damit

$y = \frac{a}{2+\sqrt{2}}$ sowie $x = \sqrt{2}\cdot y = \frac{a\cdot\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

also $x = \frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\cdot a = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2}\cdot a$

$x = \frac{2\sqrt{2}-2}{2}\cdot a = (\sqrt{2}-1)\cdot a$ und

$y = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)\cdot a}{\sqrt{2}} = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot a$; es folgt $A_{Achteck} = a^2 - 2\cdot y^2 = a^2 - 2\cdot\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot a^2$

$A_{Achteck} = a^2 - 2\cdot(1-\sqrt{2}+\frac{1}{2})\cdot a^2 = (2\sqrt{2}-2)a^2$ und damit gilt

$\frac{A_{Achteck}}{A_{Quadrat}} = \frac{(2\sqrt{2}-2)a^2}{a^2} = 2\sqrt{2}-2 \approx 0{,}828 = 82{,}8\%$.

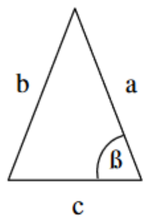
8. Trigonometrie

1)

Das abgebildete Dreieck ist gleichschenklig mit $a = b$.

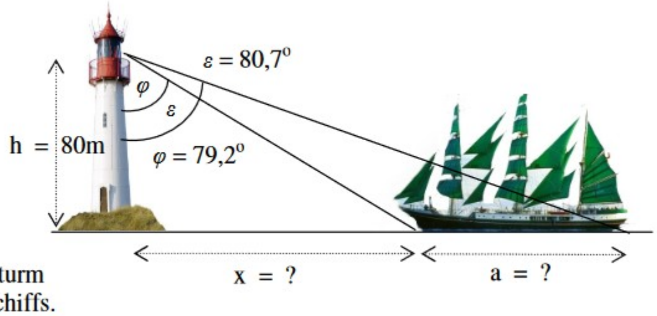
a) Es ist $a = 5{,}0$ und $ß = 75^o$.
Berechne c und den Flächeninhalt des Dreiecks.

b) Es ist $a = 5{,}0$ und $c = 4{,}0$ gegeben.
Berechne $ß$ und den Flächeninhalt des Dreiecks.



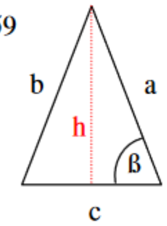
2)

Von einem Leuchtturm der Höhe $h = 80m$ über dem Meer sieht man das vordere bzw. hintere Ende eines Segelschiffs unter einem Tiefenwinkel von $\varphi = 79{,}2^o$ bzw. $\varepsilon = 80{,}7^o$.
Berechne die Entfernung x des Segelschiffs vom Leuchtturm und die Länge a des Segelschiffs.



Lösungen

1)



a) $\frac{c/2}{a} = \cos ß \;\Rightarrow\; c = 2 \cdot a \cdot \cos ß = 2 \cdot 5{,}0 \cdot \cos 75^\circ = 2{,}588... \approx\; 2{,}59$

$\frac{h}{a} = \sin ß \;\Rightarrow\; h = a \cdot \sin ß = 5{,}0 \cdot \sin 75^\circ = 4{,}829... \approx\; 4{,}83$

$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h \approx \frac{1}{2} \cdot 2{,}59 \cdot 4{,}83 \approx 6{,}25$

b) $\cos ß = \frac{c/2}{a} = \frac{c}{2a} = \frac{4}{10} = 0{,}4 \;\Rightarrow\; ß = 66{,}42...^\circ \approx 66{,}4^\circ$

$\alpha = ß$ und $\gamma = 180^\circ - 2 \cdot ß \approx 47{,}2^\circ$

2)

$\frac{x}{h} = \tan \varphi \;\Rightarrow$

$x = h \cdot \tan \varphi = 80\text{m} \cdot \tan 79{,}2^\circ \approx 419\,\text{m}$

$\frac{x+a}{h} = \tan \varepsilon \;\Rightarrow$

$x + a = h \cdot \tan \varepsilon = 80\text{m} \cdot \tan 80{,}7^\circ \approx 489\,\text{m}$

$\Rightarrow\; a \approx 489\,\text{m} - 419\text{m} = 70\text{m}$